Introduction à la
Théorie de la Relativité

par

Pierre Barbier

Novembre 1983

Introduction à la
Théorie de la Relativité

Pierre Barbier

Table des matières

1 Mécanique

1.1 Avant Galilée

Le problème du mouvement préoccupait les philosophes depuis très longtemps. Les différentes théories considéraient l'*état de repos* comme l'état « naturel » des corps et essayaient d'expliquer pourquoi un corps est en mouvement.
La théorie de l'impetus en particulier supposait qu'au moment où on communique un mouvement à un corps, il acquiert une « force » interne (impetus) qui continue à agir tant que dure le mouvement et s'épuise progressivement jusqu'au moment où le corps s'arrête. Aucune de ces théories n'était satisfaisante et les controverses allaient bon train.

1.2 Galilée et le principe d'inertie

La base de la mécanique classique a été fondée par Galilée. Pour lui :

PRINCIPE D'INERTIE

L'état naturel d'un corps est le mouvement rectiligne uniforme : un corps libre de toute influence décrit une ligne droite à vitesse constante.

Exemples :

(1) Une sphère roule sur un plan incliné et acquiert une certaine vitesse. Elle continue ensuite sur une surface horizontale. Si la sphère et la surface sont parfaitement lisses, la sphère continue à rouler indéfiniment à vitesse constante.

(2) On fait tournoyer une pierre au bout d'une ficelle. Si la ficelle casse, la pierre s'engage sur une trajectoire rectiligne car elle ne subit plus l'influence de la ficelle.

Mais : *toute déviation par rapport au mouvement rectiligne uniforme doit être justifiée* : dès qu'un mouvement est courbé ou accéléré, il faut invoquer la présence d'une force pour expliquer la déviation. Si la sphère de l'exemple (1) s'arrête, on invoquera la présence de forces de frottement qui ralentissent le mouvement. La pierre de l'exemple (2) est d'abord soumise à la force de traction du fil qui courbe sa trajectoire et en fait un cercle. Après la rupture, elle sera déviée vers le bas par la force de pesanteur.

1.3 La loi fondamentale de la mécanique classique

La notion de *force* est introduite pour rendre compte des déviations par rapport au mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire des variations de la vitesse en grandeur et en direction. Cette variation de la vitesse est représentée par une quantité vectorielle appelée *accélération* et on constate expérimentalement que pour un corps donné, la force qui lui est appliquée est proportionnelle à l'accélération qui en résulte. C'est ce que contient

LA LOI FONDAMENTALE DE LA MÉCANIQUE

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$$

où $\boldsymbol{F}$ représente la force, $\boldsymbol{a}$ l'accélération, et m est la *masse* (ou *masse inerte*, ou *inertie*) du corps, qui indique dans quelle mesure le corps va réagir à une force donnée : plus la masse est grande, plus l'accélération provoquée par une force donnée est petite.

La théorie de Newton, la mécanique classique, élaborée sur ces bases, a connu un développement et un succès énormes pendant des siècles. Elle tire sa puissance du fait que la plupart des phénomènes physiques de l'expérience quotidienne peuvent être expliqués par l'existence d'un nombre restreint de forces (par exemple la gravitation universelle) agissant sur les corps.

1.4 Le principe de relativité

Le principe d'inertie n'est pas valable pour tous les observateurs.

Exemples :

(1) Un tram est brusquement freiné. Le passager qui était immobile par rapport au tram se voit soudain projeté vers l'avant par une force mystérieuse, sans qu'aucune influence matérielle en soit responsable. Pour lui, le principe d'inertie n'est pas vrai. Pour l'observateur extérieur, le principe est valide : il se dira que le passager a tendance à continuer son mouvement rectiligne uniforme alors que le tram freine. Le passager devra donc se déplacer par rapport au tram.

(2) Sur une plateforme tournant uniformément autour d'un axe vertical, les objets que l'on dépose ont tendance à s'éloigner de plus en plus vite du centre. De même, l'observateur qui se trouve sur la plateforme sent une force étrange (la force centrifuge) le tirer vers l'extérieur.

Il importe donc de préciser l'observateur par rapport auquel les phénomènes sont décrits.

Un observateur sera matérialisé par trois axes rigides munis d'unités de longueur. Les mesures de position peuvent être réalisées si nous construisons par exemple un réseau cubique de règles de 1m de long basé sur ces trois axes et en notant près de quelles graduations des règles voisines l'événement survient. Nous disposons en outre des horloges synchronisées à chaque maille du réseau, qui permettent chacune de déterminer l'instant auquel survient un événement de son voisinage. Un observateur ainsi muni de règles et d'horloges sera appelé *référentiel.*

Les référentiels par rapport auxquels le principe d'inertie est valide sont appelés référentiels galiléens.

Les référentiels du tram freiné et de la plateforme tournante ne sont pas galiléens : les objets vus de ces référentiels ne décrivent pas un mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces.
Un référentiel lié au sol, sur terre, est approximativement galiléen (il ne l'est pas tout à fait à cause du mouvement de rotation de la terre autour de son axe, qu'on peut déceler par des expériences suffisamment précises).
Et tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel galiléen est aussi galiléen : un train en mouvement rectiligne uniforme par exemple.
On peut démontrer en fait que *tous les référentiels galiléens sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.*

Remarque : nous pouvons voir un référentiel non galiléen de deux manières :
1. soit un référentiel où le principe d'inertie n'est pas valide,
2. soit un référentiel où, pour que le principe d'inertie reste valide, on est obligé d'introduire des forces « fictives » (qu'on appelle *forces d'inertie* ou *pseudo-forces*), dont l'origine n'est pas une interaction matérielle, pour expliquer le mouvement des corps. La familière force centrifuge ou celle que ressent le passager du tram freiné sont de telles pseudo-forces.

Imaginons la situation suivante (tirée du text de Galilée) : quelqu'un se trouve dans la cabine d'un bateau, mais sans possibilité de regarder à l'extérieur. Il dispose de matériel pour réaliser différentes expériences. Il réalise les expériences quand le bateau est au port, puis lorsque le bateau se déplace uniformément sur la mer. Il ne pourra déceler aucune différence dans les résultats de ses expériences : s'il ne regarde pas au dehors il sera incapable de déceler le mouvement du bateau (pourvu qu'il soit rectiligne uniforme). Nous sommes familiers de ce fait : en voiture ou en train, nous ne sentons pas le mouvement à moins qu'il y ait des chocs, nous pouvons y verser du café comme si nous étions arrêtés, etc…
C'est le contenu du

PRINCIPE DE RELATIVITÉ

Tous les référentiels galiléens sont équivalents pour la description de la nature : les lois de la physique y sont identiques.

1.5 Le principe de relativité et le problème de l'espace

Ce principe a une portée extraordinaire : Newton concevait l'espace et le temps de la manière suivante :

> « Absolute, True, and Mathematical Time, of itself, and from its own nature flows equably without regard to anything external, …
>
> Absolute space, in its own nature, without regard to anything external, remains always similar and immoveable. … »

Selon lui, la notion de repos absolu a un sens : le fait d'affirmer « tel objet ou tel référentiel est immobile dans l'espace » a une signification. Cette affirmation est vraie ou fausse, même si on n'essaie pas de déterminer sa validité par l'expérience.
Mais le principe de relativité affirme justement qu'aucune expérience ne permettra de déterminer la validité de notre énoncé : il signifie en bref que *la notion de repos absolu n'a pas de sens physique*, ou encore, *l'espace absolu est une notion inaccessible à l'expérience.*
La mécanique clasique possède donc cette caractéristique peu satisfaisante de reposer sur une hypothèse (l'espace absolu) inaccessible à l'expérience. C'est une des difficultés de la théorie classique que la théorie d'Einstein permettra de dépasser.

2 La lumière, son histoire

La science de l'optique commence avec René Descartes : il énonce dans « La Dioptrique » (1638) les lois fondamentales de la réflection et de la réfraction de la lumière.

2.1 Vitesse de la lumière

La détermination de la vitesse de la lumière (désignée par c) a été faite indépendamment des discussions sur sa nature. Il était clair qu'elle devait être très grande et ce sont des observations astronomiques qui ont d'abord permis d'effectuer la mesure grâce aux grandes distances mises en jeu.

– Galilée (1607) avait essayé de mesurer la vitesse de la lumière à l'aide de lanternes placées en des points éloignés A et B (deux collines). A émet un signal lumineux et lorsque B le reçoit, il émet un signal à son tour. A mesure le temps séparant l'émission de son signal et la réception de celui de B, et en connaissant la distance de A à B, on peut déduire la vitesse de la lumière. Cette tentative a échoué car les temps de parcours de la lumière sont beaucoup trop courts.
– Olaf Römer (1676) est le premier à avoir calculé la vitesse de la lumière, en observant les éclipses des satellites de Jupiter. La valeur qu'il a obtenue est très proche de celle qui est admise actuellement : $c = 299.793\,\mathrm{km/s}$.
– D'autres expériences ont confirmé cette mesure. Citons seulement James Bradley (1727), Fizeau (1849), Foucault (1865).

2.2 Nature de la lumière

Deux conceptions rivales de la nature de la lumière se sont longtemps opposées :

– la théorie corpusculaire, qui considère la lumière comme composée de fines particules émises par les corps lumineux, était défendue par Newton ;
– la théorie ondulatoire, formulée par Huygens (1678), qui considère la lumière comme un phénomène ondulatoire (similaire aux ondes à la surface de l'eau et aux ondes sonores dans l'air) et présuppose l'existence d'un milieu imprégnant l'espace tout entier dont les vibrations en se propageant constitueraient les ondes lumineuses.

La théorie corpusculaire s'est imposée pendant près d'un siècle grâce à l'énorme autorité de son auteur, mais la théorie ondulatoire a connu un renouveau au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle grâce aux travaux de Thomas Young (1802).

La lumière est une onde

Young a étudié le phénomène d'interférences. Imaginons l'expérience suivante : le faisceau d'une source lumineuse traverse deux fentes étroites et parallèles d'un écran. Il se scinde en deux parties qui se « superposent » sur un deuxième écran. Contrairement à ce que prévoit la théorie corpusculaire, on observe sur l'écran une succession de zones claires et sombres. Ce phénomène ne s'explique que si on suppose que la lumière est composée d'ondes : en un point donné de l'écran, la différence entre les chemins parcourus par la lumière provenant des deux fentes fait qu'en certains points les ondes s'additionnent, donnant une zone claire, et se détruisent en d'autres, donnant une zone sombre. D'autres expériences ont confirmé la théorie ondulatoire. Elle n'a été remise en question qu'au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle par la découverte des phénomènes quantiques. Einstein a d'ailleurs contribué de manière essentielle à cette remise en question par ses travaux sur l'effet photo-électrique.

Si la lumière est une onde, dans quoi se propage-t-elle ?

Dès le début, les physiciens se sont demandé : si la lumière est une onde, donc un phénomène de vibration, *qu'est-ce qui vibre*? Ils ont supposé que l'espace tout entier était rempli d'une substance subtile, qu'ils ont appelée *éther*, dont la nature était à découvrir, mais qui aurait la propriété de vibrer comme un milieu matériel. Ces vibrations, en se propageant dans l'éther, constitueraient les ondes lumineuses.

Si l'éther imprègne l'espace, peut-on sentir le « vent d'éther » ?

Imaginons un navire qui se déplace sur la mer à la vitesse v. Il observe un train d'ondes (des vagues) qui viennent à sa rencontre. Ces vagues se propagent par rapport à leur milieu, l'eau, avec une *vitesse* w, bien connue et caractéristique de ce type d'ondes. Elles possèdent en outre une certaine *fréquence* ν par rapport au milieu (la fréquence d'une onde est le nombre de crêtes (sommets de vagues) passant par un point par unité de temps).

Les observateurs du bateau feront les observations suivantes : pour eux,

(1) la fréquence des ondes sera supérieure à ν : ils vont à la rencontre des crêtes, donc ils en croiseront plus par unité de temps qu'un observateur immobile par rapport à l'eau. Ce phénomène est appelé *effet Doppler* et nous n'entrerons pas dans plus de détails ici.

(2) La vitesse de propagation des ondes qu'ils observent sera $v + w$: comme ils vont à la rencontre des crêtes, elles se déplaceront plus vite par rapport à eux que par rapport à l'eau. Ne pas confondre avec l'effet Doppler.

Un effet analogue pourrait être montré dans le cas d'un mobile qui se déplace dans l'air et observe des ondes sonores qui viennent à sa rencontre.

Dans les deux cas, les observateurs mesurent une vitesse de propagation des ondes différente de la vitesse de celles-ci par rapport au milieu, et s'expliquent cette différence car ils peuvent déceler leur propre vitesse par rapport au milieu : le premier sent la résistance de l'eau s'opposant à son mouvement, et le second sent le vent dû à son mouvement par rapport à l'air.

Revenons à la lumière : si la lumière est une onde qui se propage dans un éther imprégnant tout l'espace, un observateur en mouvement dans l'éther doit pouvoir détecter un « vent d'éther » en observant des différences de vitesse de faisceaux lumineux venant de directions différentes.

La terre est un tel observateur : du fait de son mouvement autour du soleil, on devrait pouvoir détecter un vent d'éther, venant de directions différentes à différentes époques de l'année. L'hypothèse de l'éther est donc ouverte à l'expérience.

La suite de l'histoire

Depuis le 19$^{\text{ème}}$ siècle des expériences ont été menées dans ce but. La précision expérimentale de l'époque ne permettait pas de mesurer des effets d'un ordre de grandeur inférieur à $\frac{v}{c}$ (où v est la vitesse hypothétique de la terre dans l'éther et c la vitesse de la lumière). Le résultat a toujours été négatif : aucune différence (à la précision de l'expérience près) n'était décelée dans la vitesse de la lumière se propageant dans différentes directions.
Mais cette absence d'effet de l'ordre de $\frac{v}{c}$ a pu être expliquée en imaginant que l'éther est partiellement entraîné par la terre dans son mouvement : c'est la théorie de Fresnel.

La lumière est une onde électromagnétique

Au 19$^{\text{ème}}$ siècle, parallèlement à l'étude de la lumière, celle des phénomènes électriques et magnétiques se développe considérablement. Elle aboutit à l'élaboration d'une théorie complète des phénomènes électromagnétiques : la théorie de Maxwell.
Cette théorie prévoit l'existence d'*ondes électromagnétiques* (qui ont été mises en évidence expérimentalement par Hertz en 1888) et dont la vitesse, calculée à partir de données purement électromagnétiques, est précisément égale à la vitesse observée de la lumière. D'autres indices conduisent à *identifier la lumière à une onde électromagnétique*.
L'éther devient alors le support du champ électromagnétique, mais le problème de la vitesse de la terre par rapport à l'éther subsiste.

Et l'éther n'est pas entraîné par la matière

Au cours du 19$^{\text{ème}}$ siècle, l'étude des phénomènes électromagnétiques liés aux corps en mouvement conduit à différentes hypothèses au sujet de l'entraînement de l'éther par la matière :
- pour Hertz l'éther était complètement entraîné,
- pour Lorentz, l'éther n'est pas du tout entraîné.

Finalement, la théorie de Lorentz a fait l'unanimité : elle expliquait tous les phénomènes électromagnétiques connus, y compris les résultats négatifs des expériences antérieures pour déceler le mouvement de la terre dans l'éther.

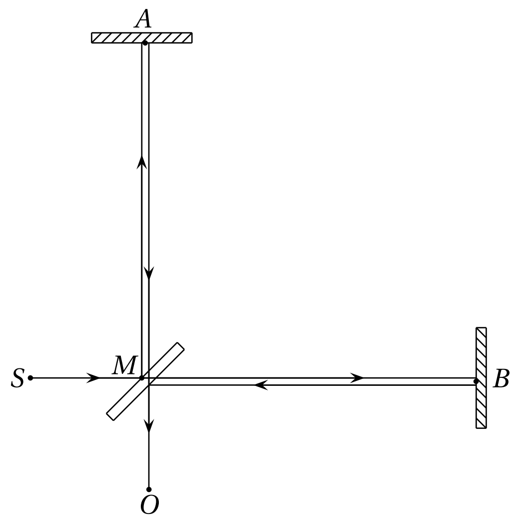
> La conception des physiciens à la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle était donc celle-ci :
> - la lumière est une onde électromagnétique qui se propage dans l'éther,
> - l'éther n'est pas entraîné par la matière dans son mouvement. Il constitue un milieu immobile identifié à l'espace absolu.

Le problème de la vitesse de la terre dans l'éther se pose donc à nouveau dans toute son acuité.
C'est ici qu'intervient l'expérience de Michelson-Morley. Ces deux physiciens ont réalisé en 1881 une expérience destinée à déceler le mouvement de la terre par rapport à l'éther avec une précision bien supérieure à celle de toutes les expériences précédentes. L'effet que l'expérience aurait mis en évidence était de l'ordre de grandeur de $(v/c)^2$, et la précision expérimentale aurait permis de déceler une vitesse v par rapport à l'éther de 1 km/s

(à titre de comparaison, la vitesse de translation de la terre autour du soleil est d'environ 30 km/s). Voici en quoi consiste cette expérience.

2.3 Expérience de Michelson-Morley

Le dispositif de Michelson-Morley est composé d'une source S émettant un faisceau lumineux vers un semi-miroir M qui a la propriété de transmettre une partie du faisceau incident et de réfléchir l'autre. Le faisceau incident est donc partagé en deux : un faisceau se dirige vers le miroir A, un autre vers le miroir B. Après réflexion, ils sont tous deux renvoyés vers le semi-miroir M et une partie de A-M est transmise vers l'observateur O tandis qu'une partie du faisceau B-M est réfléchie vers O. Les deux faisceaux qui arrivent en O interfèrent et les franges d'interférences peuvent être observées et mesurées.



Un des faisceaux effectue le parcours S-M-A-M-O et l'autre S-M-B-M-O. Les parcours se distinguent donc seulement en M-A-M et M-B-M.
Si les temps de parcours sur M-A-M et M-B-M venaient à être modifiés, on devrait observer un déplacement des franges d'interférence en O.
C'est précisément ce que voulaient faire Michelson et Morley : si la terre se déplace dans l'éther, disons dans la direction S-M-B, la vitesse de la lumière (par rapport au dispositif) doit être différente sur les parcours M-A-M, M-B et B-M. En tournant le dispositif de 90° de sorte que O-M-A vienne à coïncider avec la direction du mouvement de la terre, les temps de parcours sur ces différents trajets seront modifiés et on devra observer un déplacement des franges.

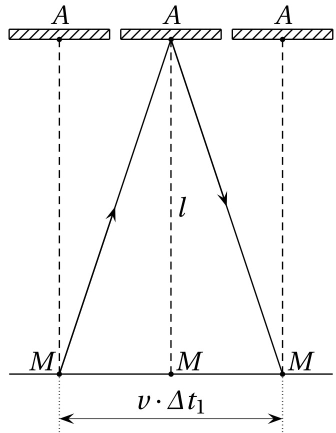
Le résultat de cette expérience fut négatif, à la consternation des physiciens : les franges ne se déplaçaient pas lorsqu'on tournait le dispositif : la lumière semblait garder la même vitesse sur les différents segments. Autrement dit, la terre semblait être au repos dans l'éther, à différentes époques de l'année, alors qu'elle se déplace dans différentes directions autour du soleil.

Différentes tentatives ingénieuses ont été faites pour expliquer ce résultat négatif. On a imaginé entre autres que les objets sont contractés dans la direction du mouvement de la terre de la quantité juste suffisante pour rétablir l'égalité des temps de parcours (contraction de Fitzgerald-Lorentz), mais de telles hypothèses « ad hoc » ne sont pas satisfaisantes.

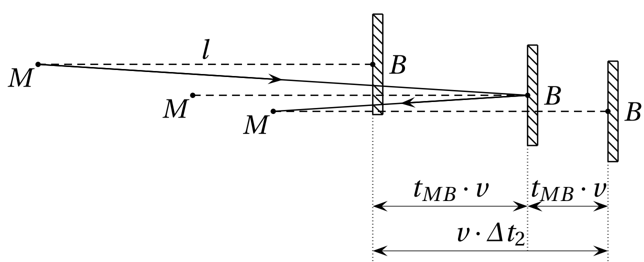
LES BRAS DE L'APPAREIL DE MICHELSON-MORLEY

Représentons-nous les trajets M-A-M et M-B-M de la lumière tels que les verrait un observateur au repos par rapport à l'éther (la terre est supposée se déplacer avec la vitesse v dans la direction S-M-B).

- Parcours M-A-M : soit Δt_1 le temps mis par la lumière pour parcourir M-A-M. La longueur du bras est l et d est la distance parcourue par le dispositif pendant le temps $\frac{\Delta t_1}{2}$ que la lumière met pour atteindre A. On a $d = v \cdot \frac{\Delta t_1}{2}$. Soit L la distance parcourue par la lumière pour atteindre A. On a $L = \sqrt{d^2 + l^2} = \sqrt{l^2 + v^2 \cdot \frac{\Delta t_1^2}{4}}$. La lumière parcourt en tout la distance $2 \cdot \sqrt{l^2 + v^2 \cdot \frac{\Delta t_1^2}{4}}$, à la vitesse c (dans l'éther), donc $c \cdot \Delta_1 = 2 \cdot \sqrt{l^2 + v^2 \cdot \frac{\Delta t_1^2}{4}}$, d'où on tire $\Delta t_1 = \frac{2 \cdot l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$.



- Parcours M-B-M : soit t_{MB} le temps mis par la lumière pour atteindre B, l'espace parcouru sur ce trajet est $l + t_{MB} \cdot v$ car le dispositif avance de $t_{MB} \cdot v$ pendant ce temps. Soit t_{BM} le temps mis par la lumière pour retourner de B à M, l'espace parcouru sur ce trajet est $l - t_{BM} \cdot v$ car le dispositif avance de $t_{BM} \cdot v$ pendant ce temps. On a $c \cdot t_{MB} = l + t_{MB} \cdot v$ donc $t_{MB} = \frac{l}{c-v}$ et $c \cdot t_{BM} = l - t_{BM} \cdot v$ donc $t_{BM} = \frac{l}{c+v}$. Le temps total mis par la lumière pour parcourir M-B-M est donc $\Delta t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}$.



Nous voyons que si les bras de l'appareil ont la même longueur l, comme nous l'avons supposé, on a malgré tout $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$.

3 Relativité restreinte

Voici la situation dans laquelle se trouvait la physique à la fin du 19ème siècle

Elle était constituée de deux parties :
- la mécanique, régie par le principe d'inertie et la loi de Newton $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$, elle conduit au *principe de relativité* et à l'idée peu satisfaisante d'une notion de repos absolu inaccessible à l'expérience ;
- la théorie de l'électromagnétisme, qui était très complète et rendait compte des phénomènes expérimentaux avec l'hypothèse d'un éther non entraîné par les corps qui s'y meuvent.

Mais deux difficultés surgissent

- L'expérience de Michelson-Morley remet tout en cause : la vitesse de la terre dans l'éther n'est pas décelable.
- Si le principe de relativité est valide dans toute sa généralité, les lois de l'électromagnétisme doivent être vraies pour tous les observateurs galiléens. Or la vitesse de la lumière peut être déduite de ces lois. Elle devrait donc être la même dans toutes les directions pour tous les référentiels galiléens. Cette hypothèse expliquerait le résultat négatif de l'expérience de Michelson-Morley : si la vitesse de la lumière est la même dans un laboratoire terrestre que dans l'éther et ce dans toutes les directions, rien d'étonnant à ce qu'aucune différence de temps ne se manifeste dans les temps de parcours de la lumière lorsqu'on tourne le dispositif de Michelson-Morley.

3.1 Postulats de la relativité restreinte

Einstein est ainsi conduit à accepter les deux postulats suivants qui forment la base de la théorie de la relativité restreinte.

POSTULATS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

(1) *Le principe de relativité* : tous les référentiels galiléens sont équivalents pour la description des lois de la physique.
(2) *L'invariance de c* : la lumière se propage avec la même vitesse c dans toutes les directions dans tous les référentiels galiléens.

Mais si ces hypothèses résolvent les difficultés antérieures, elles en créent d'autres.

Exemple : imaginons un observateur A, sur un train animé d'une vitesse de 100 km/h par rapport au talus où se trouve l'observateur B. Si A lance devant lui une balle à une vitesse de 4 km/h par rapport à lui, la thérie classique et l'expérience montrent que B mesurera pour la balle une vitesse de 104 km/h. Maintenant, si A allume une torche électrique vers l'avant du train, il mesurerait une vitesse de $c = 300.000$ km/s pour le faisceau lumineux. La théorie classique prévoit que B observera une vitesse de $c + 100$ km/h pour le faisceau, mais le second postulat de la relativité restreinte prévoirait une vitesse encore égale à c pour B.

Convaincu de la validité de ses postulats, Einstein remet en cause les notions habituelles d'espace et de temps pour résoudre ce genre de difficultés. Le résultat en est la théorie de la relativité restreinte.

3.2 Analyse de la notion de simultanéité

Einstein analyse en détail les fondements de nos conceptions de l'espace et du temps. Dans un référentiel particulier, ces notions reposent sur les mesures réalisées au moyen d'un réseau de règles et d'horloges tel que nous l'avons décrit plus haut. Mais nous avons laissé une question fondamentale dans l'ombre : *comment synchroniser les horloges*? C'est sur cette synchronisation que repose la notion de *simultanéité* de deux événements dans notre référentiel et donc la notion de *temps* elle-même.

Analogie : imaginons un bateau de longueur L au repos sur la mer. Nous supposons l'air immobile : il n'y a pas le moindre vent. À ses deux extrémités se trouvent des horloges (1) et (2) qui doivent être synchronisées. Les expérimentateurs vont pouvoir le faire en échangeant des signaux sonores : lorsque l'horloge (1) indique 0 secondes, un signal sonore est émis vers (2). Au moment de la réception, (2) saura que le signal a mis un certain temps t pour parcourir la distance L et règlera ses aiguilles sur l'instant t. La vitesse V du son étant connue, la durée t est parfaitement déterminée : $t = \frac{L}{V}$. De cette manière, les horloges (1) et (2) sont synchronisées.

Dans notre référentiel galiléen, nous utiliserons de même des signaux pour synchroniser deux horloges éloignées. Il est naturel d'utiliser des signaux lumineux (ou électromagnétiques) car ce sont les plus rapides que l'on connaisse. Il suffit de mesurer la distance séparant deux horloges de notre référentiel et de *connaître la vitesse de la lumière dans notre référentiel.*
Nous disposons maintenant d'une *définition du temps* : nous avons donné un sens physique à la notion de simultanéité en précisant une méthode concrète pour synchroniser les horloges.

Poursuivons l'analogie : imaginons un second bateau identique au premier mais qui se déplace avec une vitesse v parallèlement à lui (donc aussi avec une vitesse v par rapport à l'air). Il est muni d'horloges (3) et (4) qui doivent être synchronisées. On utilisera la même méthode que dans le premier cas, mais ici on devra tenir compte du fait que le son se déplace par rapport au bateau à la vitesse $V-v$ (dans le sens de la marche) ou $V+v$ (dans le sens opposé), à cause de son mouvement par rapport à l'air. Mais cette particularité ne pose pas de problème car les occupants du bateau en mouvement *connaissent la vitesse du son par rapport à eux puisqu'ils peuvent mesurer leur vitesse par rapport à l'air* (en mesurant le vent apparent qui se manifeste).
Le son mettra un temps $t' = \frac{L}{V-v}$ pour aller de (3) à (4) et (4) devra être réglée sur t' au moment de la réception.
Si le bateau en mouvement utilisait la même vitesse V pour le son, ses horloges seraient désynchronisées, et si au moment où il dépasse l'autre, les horloges (1) et (3) indiquent le même temps, (4) avancera par rapport à (2) de $t' - t = \frac{L}{V} \cdot \frac{v}{V-v}$.

Dans le cas des référentiels galiléens, cette partie de l'analogie n'est plus valable car *la vitesse de la lumière est la même pour tous.* Ils peuvent tous légitimement utiliser la même vitesse c dans leurs calculs, il n'existe rien de tel qu'un vent d'éther.

Nous pressentons déjà que des choses bizarres vont se produire lorsque deux référentiels galiléens compareront leurs mesures pour les mêmes événements. Nous allons constater que la plupart des notions telles que la simultanéité, l'intervalle de temps ou la distance entre deux événements n'ont plus de caractère absolu : elles dépendent de l'observateur qui effectue les mesures, en un mot elles sont *relatives*.

3.3 Relativité de la simultanéité

Imaginons l'expérience suivante : une lampe est placée au milieu d'un train de longueur L (mesurée par un observateur se déplaçant avec lui) qui se déplace à la vitesse v par rapport au talus. Lorsque la lampe s'allume, deux faisceaux sont envoyés, l'un vers l'avant et l'autre vers l'arrière du train. Lorsque les faisceaux atteignent les portes avant et arrière, elles s'ouvrent instantanément.

Pour l'observateur du train, l'ouverture des portes est simultanée : pour lui, la lumière parcourt dans les deux sens la distance $\frac{L}{2}$ à la vitesse c (d'après le principe d'invariance de la vitesse de la lumière), et met donc le même temps dans les deux sens.

Pour un observateur du talus, il en va autrement : le rayon qui se dirige vers l'arrière du train parcourt une distance inférieure à la moitié de la longueur du train puisque la porte arrière vient à sa rencontre et celui qui se dirige vers l'avant une distance supérieure puisque la porte avant le fuit. Pour lui, la porte arrière s'ouvre donc *avant* la porte avant.

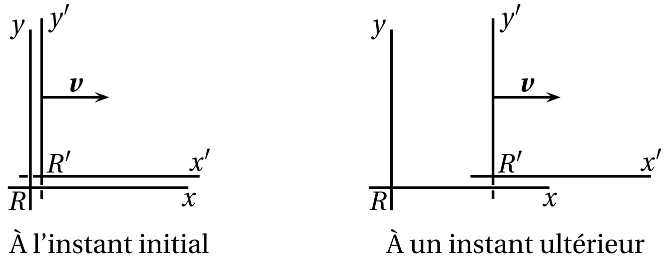
> Soit L' la longueur du train mesurée par l'observateur du talus (nous verrons d'ailleurs plus loin qu'elle est inférieure à L, mais ça n'a pas d'importance ici). Si le faisceau arrière met un temps t pour atteindre la porte, on a $c \cdot t = \frac{L'}{2} - v \cdot t$, donc $t = \frac{L'}{2 \cdot (c+v)}$, et si le faisceau avant met un temps t', on a $c \cdot t' = \frac{L'}{2} + v \cdot t'$, donc $t' = \frac{L'}{2 \cdot (c-v)}$. On a bien $t' > t$ comme annoncé.

Nous constatons donc que des événements quit sont simultanés pour un observateur peuvent ne pas l'être pour un autre.

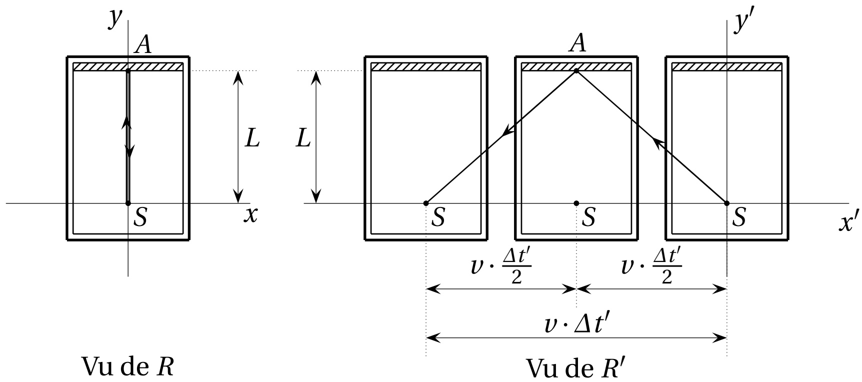
> RELATIVITÉ DE LA SIMULTANÉITÉ
>
> La notion de simultanéité de deux événements est relative : elle dépend du référentiel par rapport auquel les observations sont faites.

3.4 Relativité du temps

Dans les expériences décrites ci-dessous, nous considérons deux observateurs liés à des référentiels R et R' dont les axes x et x' coïncident et tels que R' se déplace par rapport à R à la vitesse v vers la droite. On suppose encore qu'au moment où leurs axes y et y' coïncident, les horloges indiquent pour chacun l'instant $t = t' = 0$.



Imaginons alors un dispositif composé d'une source lumineuse S et d'un miroir A séparés par une distance L. La source émet un faisceau vers le miroir, et on mesure en S le temps mis par la lumière sur le trajet aller-retour S-A-S. Le dispositif est placé dans R.



Pour R, la lumière parcourt la distance $2 \cdot L$ à la vitesse c. Le temps de parcours est donc $\Delta t = \frac{2 \cdot L}{c}$. Pour l'observateur de R' qui se déplace vers la droite avec la vitesse v par rapport au dispositif, celui-ci se déplace vers la gauche et le faisceau parcourt une ligne brisée dont la longueur est supérieure à $2 \cdot L$. Comme elle le fait encore à la vitesse c, son temps de parcours sera plus long.

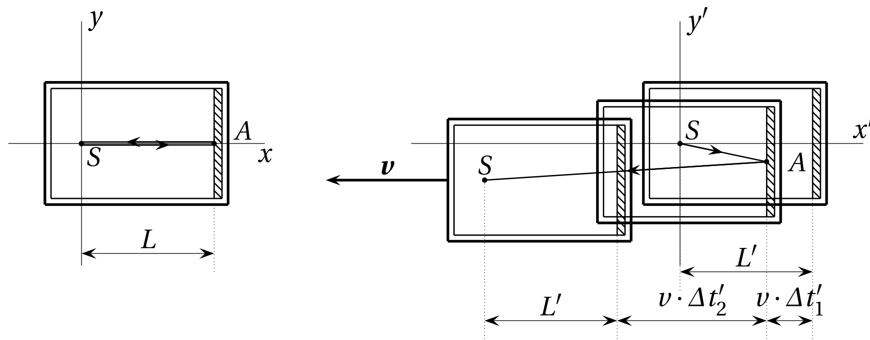
Soit $\Delta t'$ le temps de parcours de la lumière pour cet observateur. Pour atteindre le miroir, le faisceau parcourt une distance $\sqrt{L^2 + \frac{v^2 \cdot \Delta t'^2}{4}}$ et un temps $\frac{\Delta t'}{2}$ à la vitesse c.
Donc $\frac{c \cdot \Delta t'}{2} = \sqrt{L^2 + v^2 \cdot \frac{\Delta t'^2}{4}}$.
On en tire $\Delta t' = \frac{2 \cdot L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta t$.

L'intervalle de temps séparant les événements « la lumière quitte S » et « la lumière revient en S » dépend de l'observateur. Il est plus court pour celui par rapport auquel les événements au lieu au même endroit, et on l'appelle alors le *temps propre* séparant les deux événements.
On a montré que $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta t$ (= temps propre). C'est le phénomène de *dilatation du temps.*

Remarque : nous avons supposé dans ce raisonnement que la distance L séparant la source du miroir est la même pour les deux observateurs. C'est bien le cas : les distances perpendiculaires au mouvement sont les mêmes pour les deux observateurs, on peut montrer que le contraire contredirait le principe de relativité.

3.5 Relativité des longueurs

Reprenons le dispositif précédent, mais placé dans la direction de l'axe x de R. Pour R, la lumière parcourt une distance $2 \cdot L$ à la vitesse c, le temps de parcours est donc $\Delta t = \frac{2 \cdot L}{c}$. Pour R', la longueur du dispositif en mouvement sera L' (et nous allons voir que $L' \neq L$).



Vu de R Vu de R'

- Sur le trajet de la source au miroir, la lumière met un temps $\Delta t'_1$ et parcourt la distance $L' - v \cdot \Delta t'_1$ (car le dispositif vient à sa rencontre) à la vitesse c. Donc $c \cdot \Delta t'_1 = L' - v \cdot \Delta t'_1$ et $\Delta t'_1 = \frac{L'}{c+v}$.
- Sur le trajet du miroir à la source, la lumière met un temps $\Delta t'_2$ et parcourt $L' + v \cdot \Delta t'_2$ (car le dispositif recule) à la vitesse c. Donc $c \cdot \Delta t'_2 = L' + v \cdot \Delta t'_2$ et $\Delta t'_2 = \frac{L'}{c-v}$.

Le temps de parcours total est donc $\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} = \frac{2L'c}{c^2-v^2}$. Or $\Delta t = \frac{2 \cdot L}{c}$ est le temps propre séparant les deux événements (départ et arrivée du faisceau). D'après le résultat précédent, $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, donc $\frac{2L'c}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, d'où $L' = L \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} < L$: le dispositif est plus court pour R' que pour R.

Nous avons ainsi un exemple du phénomène de *contraction des longueurs* : les dimensions d'un objet en mouvement à la vitesse v sont raccourcies dans la direction du mouvement dans la proportion $\sqrt{1-v^2/c^2}$.

3.6 Transformation de Lorentz

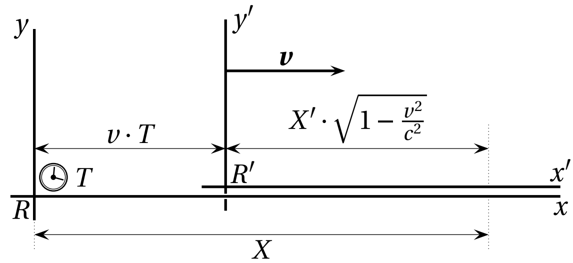
Nous pouvons à présent essayer d'établir une loi générale liant les mesures de position et de temps (X, T) et (X', T') observées par R et R' pour un événement donné.

- Représentons la situation vue de R. L'événement survient en un point d'abscisse X pour le référentiel R et d'abscisse X' pour R'. A cet instant T (mesuré par R), l'origine de R' se trouve à une distance $v \cdot T$ de l'origine de R. La mécanique classique donnerait la relation :

$$X = v \cdot T + X' \quad \text{ou} \quad X' = X - v \cdot T.$$

  Mais nous savons maintenant que les longueurs en mouvement sont contractées. L'unité de longueur de R' et le segment de longueur X' pour R' sont donc contractées pour R, et nous aurons en relativité restreinte :

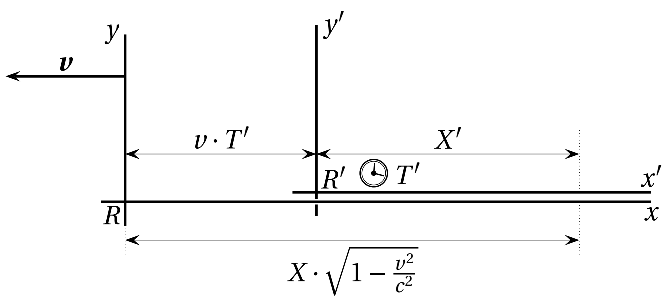
$$X = v \cdot T + X' \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} \quad \text{ou} \quad X' = \frac{X - v \cdot T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$



– La situation vue de R' est symétrique : l'origine de R se trouve à une distance $v \cdot T'$ de celle de R' et c'est le segment de longueur X de R qui est contracté. On a donc $X \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = v \cdot T' + X'$. En remplaçant X' par $\frac{X - v \cdot T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ et en explicitant T', on obtient :

$$T' = \frac{T - \frac{v \cdot X}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

alors que la mécanique classique prévoit $T' = T$ (caractère absolu du temps).



Les formules

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= \frac{X - v \cdot T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ T' &= \frac{T - \frac{v \cdot X}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}}$$

sont appelées *transformation de Lorentz* et jouent en relativité restreinte le rôle de la transformation de Galilée

$$\boxed{\begin{aligned} X' &= X - v \cdot T \\ T' &= T \end{aligned}}$$

de la mécanique classique.

3.7 Addition des vitesses

Reprenons l'exemple de l'observateur du train (référentiel R') qui lance une balle à la vitesse w (par rapport au train) vers l'avant du train. Il le fait à l'instant $T' = 0$ au point $X' = 0$. Pour l'observateur du talus (référentiel R), la balle est lancée au point $X = 0$ à l'instant $T = 0$. À un instant ultérieur (le moment où la balle atteint l'avant du train par

exemple), R et R' observent cette balle en X et X' respectivement et leurs horloges indiquent les temps T et T'. On a $\frac{X'}{T'} = w$: la vitesse de la balle pour R', et $\frac{X}{T} = W$: la vitesse de la balle pour R.
La transformation de Lorentz nous donne

$$X' = \frac{X - v \cdot T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{donc} \quad w = \frac{X'}{T'} = \frac{X - v \cdot T}{T - \frac{v \cdot X}{c^2}} = \frac{\frac{X}{T} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{X}{T}}$$

$$T' = \frac{T - \frac{v \cdot X}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{et} \quad w = \frac{W - v}{1 - \frac{v \cdot W}{c^2}}.$$

En explicitant W plutôt que w, on obtient

$$W = \frac{v + w}{1 + \frac{v \cdot w}{c^2}}.$$

Cette formule nous dit comment additionner les vitesses en relativité restreinte. La mécanique classique aurait donné $W = v + w$.

– Lorsque les vitesses sont petites par rapport à c, le terme $\frac{v \cdot w}{c^2}$ est négligeable et la formule classique est presque rigoureusement vérifiée.
– Mais si nous remplaçons la balle par un rayon lumineux, nous avons $w = c$ et

$$W = \frac{v + c}{1 + \frac{v \cdot c}{c^2}} = \frac{v + c}{\frac{c + v}{c}} = c.$$

  R observe donc la même vitesse que R', en accord avec le principe d'invariance de la vitesse de la lumière.
– Nous constatons encore que si v et w sont inférieures à c, W ne dépassera jamais la valeur de c. Même dans le cas extrême où $v = w = c$, on a encore

$$W = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

  (au lieu de $2 \cdot c$ en mécanique classique).

Nous voyons donc qu'*il est impossible d'observer des vitesses supérieures à c par des changements de référentiels successifs.*

3.8 Première illustration : le paradoxe des jumeaux ou le voyageur de Langevin

Imaginons deux jumeaux initialement sur la terre, A et B. L'un d'entre eux, B, entreprend un voyage interstellaire : il s'éloigne de la terre à la vitesse v pendant un temps t_B (mesuré par les horloges transportées par B). D'après les résultats obtenus précédemment, A mesure pour l'intervalle de temps séparant le départ de B et le moment où il va faire demi-tour la valeur $t_A = t_B \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (car t_B est le temps propre séparant les deux événements). Ensuite, B fait demi-tour (il change donc de référentiel galiléen) et revient vers A avec la vitesse v. Ses horloges lui indiquent à nouveau t_B pour le voyage de retour et celles de A mesurent à nouveau t_A. B a donc vieilli de $T_B = 2 \cdot t_B$ alors que A a vieilli de $T_A = 2 \cdot t_A$ entre le départ et le retour de B. Or on a $T_A = T_B \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} > T_B$. Donc A est maintenant *plus vieux* que son jumeau B.

Remarque : la terre est ici considérée comme un référentiel galiléen et on ne tient pas compte des effets du champ de gravitation. Ils ont leur importance mais ne peuvent être examinés que dans le cadre de la relativité générale.

- On pourrait faire l'objection suivante : que voit B ? Il voit tout d'abord A s'éloigner de lui à la vitesse v, puis faire demi-tour et se rapprocher de lui toujours à la vitesse v. De son point de vue, c'est A qui a fait le voyage et il pourrait déduire du principe de relativité qu'on devrait avoir également $T_B = T_A \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, ce qui contredirait le résultat précédent. Mais ce raisonnement, qui conduit à un paradoxe, est fallacieux : le principe de relativité ne s'applique qu'aux observateurs galiléens, or B n'est pas à tous les instants de son voyage un observateur galiléen : il est obligé de faire demi-tour et à ce moment, il *sentira* la décélération et l'accélération imprimée à son vaisseau, alors que A ne sent jamais rien de tel. Les observateurs A et B ne sont donc pas équivalents (pour la relativité restreinte) et bien qu'étonnant, le résultat n'est pas contradictoire.
- Du point de vue des distances, il peut sembler étrange que pour le même voyage, A et B mesurent des temps différents. Mais en fait, A et B observent des distances différentes entre le point de départ T et de point de demi-tour T' : si L est la longueur observée par A, B observe la longueur $L' = L \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}$ car TT' se déplace par rapport à lui. A se dira : B parcourt L en un temps t_A, donc sa vitesse est $v = \frac{L}{t_A}$; B se dira : je parcours L' en un temps t_B, donc ma vitesse par rapport à A est $v = \frac{L'}{t_B} = \frac{L\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}}{t_A\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{L}{t_A}$ en accord avec A. Bien que A et B soient d'accord sur la vitesse de B, ils mesurent des temps et des distances différents.

3.9 Deuxième illustration : durée de vie des muons

Voici une expérience réelle qui confirme l'effet de la dilatation du temps. Les muons sont des particules chargées environ 200 fois plus massives que les électrons. Ils se désintègrent spontanément en d'autres particules au bout d'un temps T très court : en moyenne, $T = 2,2$ microsecondes (lorsqu'on les observe à faible vitesse). Ces particules sont produites dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques et se dirigent vers le sol à une vitesse voisine de c.

D'après la mécanique classique, même à la vitesse c, ces particules ne pourraient parcourir qu'une distance de $c \cdot T = 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 660$ mètres avant de se désintégrer. Or on peut les observer jusqu'au niveau du sol alors qu'ils ont parcouru une distance bien supérieure L.

L'explication est que, bien que les muons ne vivent effectivement que 2,2 microsecondes *pour des horloges qui se déplaceraient avec eux* (temps propre), le temps de vie que mesurerait un observateur terrestre pour des muons se déplaçant à une vitesse v serait $t = \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ qui peut être bien supérieur à T lorsque v est proche de c. Du point de vue des muons, le temps écoulé entre leur création et leur désintégration est bien de 2,2 microsecondes mais la distance qu'ils parcourent est $L \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}$, qui peut être bien inférieure à L lorsque v est proche de c.

3.10 Dynamique relativiste

La mécanique classique repose sur l'équation $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$: lorsque la force est connue, le mouvement d'un corps de masse m sous son action est complètement déterminé et peut être calculé à partir de cette équation. Nous pouvons nous demander ce que devient cette loi en relativité restreinte. Nous serons guidés dans cette voie par l'étude de la notion de quantité de mouvement.

La quantité de mouvement. En mécanique classique, on définit la *quantité de mouvement* $\boldsymbol{p}$ d'une masse m animée d'une vitesse $\boldsymbol{v}$ par $\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$. Cette quantité a une propriété intéressante :

> PRINCIPE DE CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT
>
> Si un système d'objets n'est soumis qu'aux forces d'interaction internes (donc pas de force extérieure), la quantité de mouvement totale du système (c'est-à-dire la somme des quantités de mouvement des objets) reste constante au cours du temps quels que soient les phénomènes qui s'y déroulent.

Exemples :

(1) Deux billes de billard de masse m se heurtent. Avant le choc, l'une est au repos et l'autre se dirige vers elle avec une vitesse v. Après le choc, elles sont animées des vitesses v_1 et v_2 respectivement. La quantité de mouvement totale avant le choc est $m \cdot v + m \cdot 0 = m \cdot v$, et après le choc, $m \cdot v_1 + m \cdot v_2$. On doit avoir l'après le principe de conservation de la quantité de mouvement : $m \cdot v = m \cdot v_1 + m \cdot v_2$, donc $v = v_1 + v_2$.

(2) Deux corps de masses m se heurtent. Avant le choc, l'un est au repos et l'autre animé d'une vitesse v vers la droite. Après le choc, les deux corps restent collés et l'ensemble, de masse $M = 2 \cdot m$, se déplace à vitesse $\overline{v}$ vers la droite. La conservation de la quantité de mouvement donne $m \cdot v + m \cdot 0 = 2 \cdot m \cdot \overline{v}$, donc $m \cdot v = 2 \cdot m \cdot \overline{v}$, d'où $\overline{v} = \frac{v}{2}$.

Une telle loi de conservation est utile car elle permet de résoudre de nombreux problèmes (comme nous venons de le faire) et nous aimerions pouvoir la garder dans le cadre de la relativité restreinte. Mais nous devrons l'adapter car, telle quelle, *elle n'est plus en accord avec le principe de relativité* : les lois de transformation des coordonnées d'un référentiel à l'autre ne sont plus les mêmes qu'en mécanique classique et on peut montrer qui si la loi est vraie pour un référentiel galiléen, elle ne l'est plus nécessairement pour les autres. L'issue de cette difficulté est de *modifier la définition de la quantité de mouvement.* On est amené à adopter, en relativité restreinte, l'expression $\boldsymbol{p} = \frac{m \cdot \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ pour la quantité de mouvement, ce qui revient à remplacer la masse m par $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. C'est cette quantité qui est maintenant conservée lors des phénomènes physiques.

Et que devient $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$? L'accélération $\boldsymbol{a}$ décrit le taux de variation de la vitesse $\boldsymbol{v}$ au cours du temps. En mécanique classique, comme la masse m est constante, $m \cdot \boldsymbol{a}$ représente le taux de variation de la quantité de mouvement $m \cdot \boldsymbol{v}$. On écrit mathématiquement $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$: la force est le taux de variation de la quantité de mouvement.
Nous adopterons cette loi fondamentale pour la dynamique relativiste, mais avec pour $\boldsymbol{p}$ la nouvelle expression $\boldsymbol{p} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \boldsymbol{v}$. Tout se passe donc comme si la masse augmentait

avec la vitesse : plus le corps va vite, plus il oppose de résistance (inertie) à une nouvelle accélération. Lorsque la vitesse approche c, le terme $\sqrt{1-v^2/c^2}$ se rapproche de 0, donc la masse $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ tend vers l'infini. Nous voyons un deuxième aspect du caractère limite de la vitesse c : *il est impossible d'accélérer un objet à une vitesse supérieure à c* car plus sa vitesse augmente, plus sa masse augmente et il faut une force de plus en plus grande (et tendant vers l'infini) pour l'accélérer encore d'une quantité donnée.

L'énergie. Il existe en mécanique classique une autre loi de conservation importante : celle de l'énergie. Reprenons l'exemple (1). L'énergie des billes est ici cinétique, et elle est définie par $E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$. L'énergie cinétique totale avant le choc est $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+0$ et après le choc $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^2$. Dans le cas des boules de billard, l'énergie cinétique est conservée (on dit que le choc est *parfaitement élastique*). On a donc $v^2 = v_1^2+v_2^2$ et on avait $v = v_1+v_2$, donc $v^2 = v_1^2+v_2^2+2\cdot v_1\cdot v_2$, donc $v_1\cdot v_2 = 0$. Comme v_2 ne peut être nul (sinon une boule traverse l'autre !), $v_1 = 0$ et $v_2 = v$. Les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie nous permettent de dire ce qui se passe après le choc : la boule incidente s'immobilise et l'autre s'éloigne à la vitesse v.
Dans l'exemple (2), l'énergie cinétique n'est pas conservée : avant le choc, elle vaut $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ et après le choc $\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot \overline{v}^2 = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(\frac{v}{2})^2 = \frac{1}{4}\cdot m\cdot v^2$. On est obligé d'introduire une nouvelle forme d'énergie, ici la chaleur, pour que le principe de conservation de l'énergie reste valide : une partie $\frac{1}{4}\cdot m\cdot v^2$ de l'énergie cinétique initiale a été transformée en chaleur lors du choc et il faut ajouter ce terme aux énergies finales pour rétablir l'équilibre du bilan d'énergie.
En relativité restreinte, on est amené à définir l'énergie d'un corps de masse m se déplaçant à la vitesse v par $E = \frac{m\cdot c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. On peut faire les observations suivantes :

- le principe de *conservation de l'énergie* est valide avec cette définition et est en fait une conséquence du principe de conservation de la quantité de mouvement et du principe de relativité, ce qui n'était pas le cas en mécanique classique.
- La conservation de l'énergie est *toujours* valable en relativité restreinte, il n'est pas nécessaire d'introduire d'autres types d'énergie.
- Lorsque la vitesse v est petite par rapport à c, on a $E = m\cdot c^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$. On reconnaît dans le second terme l'énergie cinétique classique. Lorsque $v = 0$, $E = m\cdot c^2$ est l'énergie au repos de l'objet.
- En relativité, la masse et l'énergie ne sont plus des concepts séparés comme en mécanique classique :
  - toute forme d'énergie possède aussi une inertie (ou masse),
  - la masse m d'un corps au repos représente une énergie $E = m\cdot c^2$ qui peut être totalement ou partiellement manifestée lors de phénomènes physiques divers.

  Cette parenté entre masse et énergie est actuellement constamment véfifiée par l'observation des processus de collisions entre particules élémentaires : on observe des désintégrations de matière (c'est-à-dire de particules de masse au repos non nulle) en énergie (lumière) aussi bien que des créations de nouvelles particules à partir de l'énergie cinétique des anciennes.

4 Relativité générale

La relativité restreinte est parfaitement adaptée pour l'étude des phénomènes électromagnétiques, sur laquelle elle est basée. Depuis Newton, on disposait également d'une théorie des phénomènes gravitationnels basée sur la loi de la gravitation universelle.

LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

Tous les corps s'attirent les uns les autres ; deux corps de masses m et m' séparés par une distance r exercent l'un sur l'autre une force d'attraction $F = G \cdot \frac{m \cdot m'}{r^2}$ où G est une constante.

Mais la relativité restreinte ne peut pas incorporer cette conception de la gravitation : dans la théorie de Newton, si l'un des deux corps en interaction se déplace, l'autre « sent » instantanément que la direction ou l'intensité de la force qu'il subit a changé. L'« influence gravitationnelle » se transmet à une vitesse infinie. Or nous avons vu que les vitesses de propagation supérieures à c sont bannies du cadre conceptuel de la relativité restreinte.
D'autres difficultés conceptuelles étaient présentes même dans les fondements de la relativité restreinte. Nous allons essayer de suivre Einstein dans les réflexions qui l'ont amené à poser les bases de la relativité générale.

4.1 Le principe de la relativité restreinte n'est pas suffisant

Le principe de relativité (nous dirons maintenant de relativité restreinte) postule l'équivalence des référentiels galiléens pour la description des phénomènes naturels. Nous avons vu ce qui se passe dans un référentiel non galiléen (un train accéléré ou une plateforme tournante) : les pseudo-forces apparaissent, le principe d'inertie n'est pas valide.
Mais on peut se demander, comme Einstein, ce qui différencie fondamentalement un référentiel galiléen d'un autre. Pouvons-nous invoquer une circonstance particulière, une cause qui justifierait le caractère non galiléen d'un référentiel hormis la constatation que le principe d'inertie n'y est pas valide ? La mécanique classique répond à cette question en faisant appel à la notion d'espace absolu de Newton : un référentiel n'est pas galiléen lorsqu'il est accéléré ou en rotation par rapport à l'espace.
Cette idée est conceptuellement peu satisfaisante car elle fait appel à un principe d'explication qui n'est pas accessible à l'expérience (en effet, nous avons vu que le repos absolu n'est pas décelable).
Pour illustrer ce point, Einstein a utilisé l'« expérience par la pensée » suivante : imaginons que l'univers est complètement vide de matière, un espace dans lequel nous ne disposons d'aucun repère pour nous orienter. Il y a uniquement deux sphères liquides S_1 et S_2. L'une d'elles, S_2, est alors mise en rotation autour de l'axe joignant les centres des sphères. Dans une situation normale (avec une répartition normale de matière dans l'univers), la sphère en rotation (qui constitue alors un référentiel non galiléen) doit prendre une forme aplatie (celle d'un ellipsoïde). Mais ici, la situation des deux sphères est tout à fait symétrique puisqu'il n'y a pas d'autre corps de référence, chacune est en rotation par rapport à l'autre et il semble absurde que seule l'une des deux sphères change de forme. Cette expérience est évidemment irréalisable, mais elle suggère l'idée suivante, appelée *principe de Mach* :

PRINCIPE DE MACH

Le caractère galiléen d'un référentiel ne dépend pas de son mouvement par rapport à un hypothétique espace absolu, mais plutôt de son mouvement (ou plus précisément son accélération) par rapport à l'ensemble de la matière de l'univers.

4.2 Le principe de relativité générale

Nous exigerons que les lois de la physique ne dépendent que des positions et des mouvements *relatifs* des corps. Ceci interdit de privilégier aucun type de référentiel car un référentiel privilégié constituerait encore une référence absolue pour le mouvement.

PRINCIPE DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Tous les référentiels (sans exception) sont équivalents pour la description des lois de la nature : elles doivent être les mêmes dans tous les référentiels.

À première vue, cet énoncé paraît faux : nous savons que dans un référentiel non galiléen se produisent des phénomènes qui contredisent le principe d'inertie. Mais le génie d'Einstein a été d'arriver à mener à bien cette généralisation du principe de relativité en reformulant la loi de l'inertie dans un cadre qui constitue une théorie complète de la gravitation.

4.3 Inertie et poids

Nous devons maintenant montrer comment les phénomènes gravitationnels s'inscrivent dans la généralisation du principe de relativité. Tout repose sur un fait expérimental bien connu depuis Galilée :

Tous les corps tombent dans un champ de gravitation (comme celui qui règne à la surface de la terre) avec la *même* accélération.

Ceci signifie que si nous lâchons en même temps deux corps quelconques (*même de poids très différents*) d'une hauteur donnée, leur mouvement est absolument identique : leur vitesse de chute augmentera de la même façon et ils toucheront le sol en même temps (si nous éliminons l'influence du frottement de l'air).

Ce fait est extrêmement surprenant lorsqu'on l'interprète dans le cadre classique : le mouvement d'un corps en chute fait intervenir deux notions :

(1) *l'inertie* : le corps subit une force d'attraction (son poids) $\boldsymbol{F}$ qui lui communique une accélération $\boldsymbol{a}$ telle que $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$ où m est la *masse inerte* du corps ;

(2) *le poids* qui est un type particulier de force, mais qui s'avère être dans tous les cas exactement proportionnelle à l'inertie du corps sur lequel elle agit : $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{g}$ où $\boldsymbol{g}$ est un vecteur constant (indépendant du corps).

En identifiant les deux expressions de $\boldsymbol{F}$, on a $m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \boldsymbol{g}$, donc $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$: l'accélération d'un corps en chute est toujours le même vecteur $\boldsymbol{g}$.

Eötvös (1890), puis Dicke (1961) ont confirmé expérimentalement cette proportionnalité avec une précision extrême.

La mécanique classique était incapable d'expliquer cette coïncidence extraordinaire. Dans la théorie d'Einstein, par contre, elle deviendra une évidence car la gravitation sera réduite à un phénomène d'inertie.

4.4 Le principe d'équivalence

Imaginons deux laboratoires identiques A et B de dimensions pas trop grandes et observés pendant un temps pas trop long (nous verrons plus loin pourquoi).

- Dans une pemière situation, A est en chute libre à la surface de la terre (sans mouvement de rotation) et B se trouve dans l'espace, loin de toute influence d'autre matière (sans rotation non plus par rapport aux étoiles fixes). Dans B ne règne aucun champ de gravitation et les lois de la physique sont celles de la relativité restreinte : B est un référentiel galiléen. Dans A, malgré l'apparence désespérée de la situation (mais nous supposerons que tout a été prévu pour amortir l'arrivée au sol !), tout se passe exactement comme dans B : tous les objets tombent avec la même accélération que les parois, donc
  - une bille lancée dans A décrira un mouvement rectiligne uniforme par rapport aux parois,
  - l'expérimentateur et ses appareils sont en état d'apesanteur.

  La mécanique classique reconnaissait déjà l'équivalence de A et de B dans cette situation, mais d'une manière un peu artificielle : elle voit en A un référentiel *non galiléen* mais où une coïncidence (la proportionnalité de la masse inerte et du poids justement) annulle les effets de l'accélération vers le bas par le champ de gravitation de la terre.

  > La relativité générale remédie à cette situation : pour elle, les référentiels en « chute libre » et sans rotation (pourvu que leurs dimensions ne soient pas trop grandes) sont les « vrais » référentiels galiléens : les lois de la relativité restreinte y sont valides.

- Reprenons nos laboratoires A et B dans une autre situation : A se trouve au repos à la surface de la terre, le champ de gravitation terrestre y règne ; B est toujours dans l'espace, mais il est attaché à une fusée qui lui communique une accélération $\boldsymbol{g}$. Ici aussi, tout se passe exactement de la même façon dans A et dans B :
  - le sol de B communique l'accélération du laboratoire à l'expérimentateur, et celui-ci ressent la force d'inertie $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{g}$ comme A ressent son poids $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{g}$.
  - Dès qu'on lâche un objet dans B, il continue en mouvement rectiligne uniforme alors que le sol vient à sa rencontre de plus en plus vite. Tous les objets paraissent tomber avec la *même* accélération $\boldsymbol{g}$, alors que dans A c'est la proportionnalité de la masse et du poids qui provoque cet effet.

Le *principe d'équivalence*, dans le même esprit que le principe de relativité, affirme que rien ne distingue A et B.

> PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE
>
> Un référentiel galiléen (de dimensions suffisamment petites) placé dans un champ de gravitation $\boldsymbol{g}$ et un référentiel doué d'une accélération $\boldsymbol{g}$ sont équivalents pour la description des lois de la nature : les lois de la physique y sont identiques.

4.5 Pour résumer

En relativité générale :

- L'*état naturel* d'un corps est la chute libre.

- Les *référentiels galiléens* sont ceux (pas trop grands) où les lois de la relativité restreinte sont valides.
- Ce sont les référentiels en chute libre et sans rotation.
- Il n'y règne aucun champ de gravitation.

La gravitation ordinaire a été réduite à une force d'inertie : celle que le sol exerce sur nous pour nous dévier de notre mouvement naturel, la chute libre. La gravitation au sens de Newton n'existe pas.

- Les lois de la physique s'énoncent de la même façon dans tous les référentiels. Les référentiels galiléens ne se distinguent que parce que la forme mathématique des équations est plus simple.

4.6 Mais tout n'est pas si simple

Nous avons vu apparaître les mots « de dimensions pas trop grandes ». Voici pourquoi. Imaginons que les laboratoires A et B soient choisis trop grands, de sorte que la courbure de la terre soit sensible dans A.
- Dans la première situation, A constatera que deux objets lâchés en même temps ont tendance à se rapprocher, ce qui ne se produit pas pour B.
- Dans la deuxième situation, A constatera que deux objets lâchés en même temps de la même hauteur ont tendance à se rapprocher l'un de l'autre en tombant, alors que rien de semblable n'a lieu pour B.

Nous voyons donc qu'un champ de gravitation tel que celui de la terre ne peut pas être réduit globalement à une force d'inertie : sa symétrie centrale l'interdit. C'est pour cela que les champs de gravitation ne sont que *localement* équivalents à des forces d'inertie et que nous devons limiter l'étendue spatiale et temporelle de l'expérience pour que l'équivalence soit réelle.

4.7 La courbure de l'espace-temps

Cette difficulté peut être surmontée et c'est l'un des nombreux points où le génie d'Einstein se manifeste. Mais la difficulté mathématique de la tâche est énorme et nous ne pourrons pas le suivre. Mentionnons simplement que c'est pour résoudre cette difficulté que la célèbre « courbure de l'espace-temps » a été introduite : au voisinage de la matière, cette « courbure » se manifeste entre autres par le rapprochement des objest lâchés dans le référentiel A du dernier exemple.

4.8 La courbure des rayons lumineux au voisinage de la matière

Demandons-nous quel est le comportement de la lumière dans un champ de gravitation. Y est-elle sensible ? La réponse nous est fournie par le principe d'équivalence.
Reprenons le référentiel B accéléré par une fusée et imaginons qu'un rayon lumineux venant de l'extérieur pénètre à l'instant t_0 dans B perpendiculairement à la paroi latérale. Soit R un référentiel galiléen animé de la vitesse de B à l'instant t_0 et qui coïncide avec B à cet instant. Dans R, le rayon parcourt la largeur de B *en ligne droite*. Mais comme la

vitesse de B augmente pendant que le rayon traverse B, ce rayon touchera la paroi opposée de B plus bas qu'il n'est entré. La lumière est donc déviée par une force d'inertie. Le principe d'équivalence permet alors d'affirmer :

Les rayons lumineux sont courbés par un champ de gravitation.

Eddington a pu mettre cet effet en évidence expérimentalement en 1919 en photographiant les étoiles voisines du soleil sur la voûte céleste pendant une éclipse (pour que la lumière trop intense du soleil ne masque pas les étoiles) et en comparant le cliché avec l'image de la même partie du ciel à une autre époque de l'année quand le soleil ne s'y trouve pas. Les étoiles semblaient plus écartées quand le soleil est là que quand il n'y est pas, et des étoiles qui auraient dû être cachées par l'astre étaient visibles sur son bord. Ce résultat peut être expliqué par une courbure des rayons au voisinage du soleil très précisément égale à celle que prévoit la théorie.

4.9 Déplacement du périhélie de Mercure

Un autre grand succès de la relativité générale est d'avoir pu expliquer le phénomène reconnu depuis 1845 (par l'astronome Leverrier) du déplacement du périhélie de la planète Mercure.
La théorie de Newton prévoit qu'une planète soumise uniquement à l'attraction du soleil décrit une ellipse dont il occupe l'un des foyers. En réalité, les planètes interagissent entre elles et les attractions mutuelles, bien que faibles par rapport à celle du soleil, entrent en jeu en « perturbant » ces ellipses. Toutes les perturbations observées s'expliquaient par la théorie de Newton à l'exception d'une seule : le périhélie (c'est-à-dire le point de l'ellipse le plus proche du soleil) de la planète Mercure tourne lentement autour du soleil (d'un angle de 43 secondes par siècle, ce qui est infime).
Différentes tentatives ont été faites pour expliquer cette déviation par la théorie classique : on a invoqué la perturbation par la présence de matière interplanétaire ou d'astéroïdes proches de Mercure, mais aucun de ces modèles n'était satisfaisant.
La théorie d'Einstein en revanche prévoit un déplacement du périhélie pour toutes les planètes, trop faible pour être observé sauf dans le cas de Mercure où la prédiction théorique correspond exactement à l'observation.